УДК 51-72:530.145

О СТРУКТУРЕ КОНФОРМНО ИНВАРИАНТНЫХ МОДЕЛЕЙ В ОДНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.В. Галажинский, О. Лехтенфельд*, К.В. Половников

Томский политехнический университет
*Ганноверский университет, г. Ганновер, Германия
E-mail: galajin@mph.phtd.tpu.edu.ru, lechtenf@itp.uni-hannover.de,
kir@mph.phtd.tpu.edu.ru

Изучается общая структура конформно инвариантной квантовой механики в одномерном пространстве. Исследуется поведение системы относительно унитарных преобразований, генерируемых конформной алгеброй. Строится унитарное преобразование, посредством которого любая конформно инвариантная квантовая механика в одном измерении может быть преобразована в свободную систему, с нелокально реализованной полной конформной симметрией.

В последнее время наблюдается всплеск интереса к конформно инвариантным моделям в одномерном пространстве. С одной стороны этот интерес обусловлен исследованием различных аспектов AdS/CFT соответствия. Несмотря на значительный прогресс в понимании AdS/CFT дуальности [1], содержательные примеры AdS_2/CFT_1 соответствия практически неизвестны. В этом контексте изучение конформно инвариантных моделей в одном измерении и установление взаимосвязи с теориями поля в двумерном пространстве анти де Ситтера представляет значительный интерес.

С другой стороны конформная группа определяет изометрии метрики пространства анти де Ситтера и модели частиц на таком фоне автоматически являются конформно инвариантными. Поскольку геометрия анти де Ситтера описывает область вблизи горизонта событий целого класса экстремальных черных дыр (см., например, обзор [2]), в работах [3, 4] было высказано предположение о том, что конформная механика может обеспечить определенную информацию о квантовых свойствах черных дыр. Данная идея интенсивно развивалась в ряде работ [5–10], где, в частности, была построена и исследована конформная квантовая механика на пространстве модулей системы статических черных дыр в четырехмерном и пятимерном пространствах. В этом контексте также привлекательно выглядит гипотеза Гиббонса и Таунсенда [4], согласно которой N=4 суперконформное расширение одномерной модели Калоджеро [11] в пределе большого числа частиц способно обеспечить микроскопическое описание экстремальной черной дыры Райсснера-Нордсрема вблизи горизонта событий. Построение лагранжевой или гамильтоновой формулировки для N=4 суперконформной модели Калоджеро представляет собой открытую проблему [12–15].

Отдельное направление исследований посвящено изучению одномерных (конформно инвариантных) моделей в контексте теории интегрируемых систем и точно решаемых моделей квантовой механики (см. классические обзоры [16, 17]). Наиболее пристальное внимание привлекли различные модификации модели Калоджеро и их разнообразные физические применения (см. монографию [18] и цитируемую там литературу). Подробное обсуждение одномерных систем в контексте современной теории калибровочных полей приведено в работе [19].

Целью настоящей работы является изучение общей структуры конформно инвариантной квантовой механики в одномерном пространстве. В частности, исследовано поведение конформной системы общего вида относительно унитарных преобразований, генерируемых конформной алгеброй. Построено унитарное преобразование, посредством которого любая конформно инвариантная квантовая механика в одном измерении может быть преобразована в свободную систему, с нелокально реализованной полной конформной симметрией. В практических вычислениях использование такого преобразования позволяет существенно упростить анализ спектра и построение волновых функций, а также предлагает принципиально новый метод построения суперсимметричных расширений.

Рассмотрим квантовую механику n частиц в одномерном пространстве, определяемую оператором Гамильтона общего вида[1]

$$H=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2m_i}p_ip_i+U(x^1,\ldots,x^n),$$

где m_i – масса и p_i – оператор импульса i-ой частицы, U – потенциал взаимодействия исходной конформной квантовой механики.

Класс конформно инвариантных моделей выделяется наложением коммутационных соотношений алгебры Ли $so(1,2)$

$$[H,D]=iH,\ [H,K]=2iD,\ \ [D,K]=iK, \qquad (1)$$

где D и K – генераторы дилатаций и специальных конформных преобразований в стандартной реализации [20]:

$$D=-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(x^ip_i+p_ix^i),\quad K=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_ix^ix^i. \qquad (2)$$

[1] В данной работе используется естественная система единиц ($\hbar$=1) и стандартное координатное представление $p_i=-i\frac{\partial}{\partial x^i}$.

Первое равенство в (1) подразумевает ограничение на вид потенциала взаимодействия

$$[U,D]=iU \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x^i \frac{\partial}{\partial x^i}U+2U=0,$$

которое в дальнейшем мы предполагаем выполненным.

Простейшим примером конформно инвариантной модели в одном измерении является система n невзаимодействующих частиц. Соответствующий гамильтониан обозначим символом H_0.

Рассмотрим унитарное преобразование наблюдаемых

$$O \to O' = e^{iG} O e^{-iG},$$

где в качестве оператора G выберем произвольный элемент конформной алгебры

$$G=\alpha H+\beta K+\gamma D,$$

α, β, γ – произвольные вещественные постоянные.

Используя формулу Бейкера-Хаусдорфа

$$e^{iG} O e^{-iG} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} O_n, \quad O_0 = O,$$

$$O_n = [G,[G,\dots[G,O]\dots] \quad (n \text{ раз}),$$

находим, что операторы H', D', K' являются линейными комбинациями исходных H, D, K, при этом соответствующие коэффициенты представимы в виде бесконечных рядов по α, β, и γ.

Наложение условия

$$\gamma^2=4\alpha\beta,$$

позволяет оборвать ряды на конечном (третьем) шаге и приводит к значительному упрощению

$$H' = (1+\gamma+\alpha\beta)H + \beta(2+\gamma)D + \beta^2 K,$$

$$D' = -\alpha\left(1+\frac{\gamma}{2}\right)H + \left(1-\frac{\gamma^2}{2}\right)D + \beta\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)K,$$

$$K' = \alpha^2 H + \alpha(\gamma-2) + \left(1-\frac{\gamma}{2}\right)^2 K. \tag{3}$$

В частности, выбирая коэффициенты в следующем виде:

$$\alpha\beta=1 \Rightarrow \gamma=-2,$$

отображаем исходный гамильтониан в генератор специальных конформных преобразований K.

Как уже отмечалось ранее, гамильтониан системы невзаимодействующих частиц $H_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2m_i} p_i p_i$ и операторы (2) реализуют представление конформной алгебры (1). Для данного представления можно рассмотреть оператор

$$G_0 = \lambda H_0 + \sigma K + \delta D,$$

где λ, σ, δ – произвольные вещественные постоянные, и построить преобразование, аналогичное (3). В частности, следующий выбор коэффициентов:

$$\lambda\sigma=-1,\ \delta=2,$$

позволяет отобразить оператор K в гамильтониан H_0 свободной системы.

Применим суперпозицию указанных преобразований к операторам H, D, K и наложим дополнительное условие на коэффициенты

$$\beta\lambda=-1 \Rightarrow \lambda=-\alpha.$$

В итоге имеем унитарное преобразование

$$H \to H_0,\ D \to D,\ K \to K+\alpha^2 e^{iG_0} U e^{iG_0}. \tag{4}$$

Таким образом, предъявлено унитарное преобразование, посредством которого любая конформно инвариантная одномерная квантовая механика может быть преобразована в свободную систему. Отметим, что специальные конформные преобразования реализованы в ней нестандартным и, в частности, нелокальным образом.

Полезно подчеркнуть, что стационарные состояния ψ конформного гамильтониана H могут быть построены в терминах оператора обратного преобразования V^{-1} и стационарных состояний свободной системы ψ_0 (см., например, работы [21–23], где в этом контексте обсуждается модель Калоджеро)

$$\psi=V^{-1}\psi_0.$$

Покажем, что построенное преобразование не зависит от выбора размерного параметра α, который не фиксируется изложенным выше формализмом. Принимая во внимание явный вид операторов G и G_0

$$G = \alpha H + \frac{1}{\alpha}K - 2D, \quad G_0 = -\alpha H_0 - \frac{1}{\alpha}K + 2D,$$

и коммутационные соотношения (1), которые выполнены как для H, так и для H_0, находим

$$\frac{de^{iG_0}}{d\alpha} = -\frac{2i}{\alpha}e^{iG_0}\left(D-\frac{1}{\alpha}K\right), \quad \frac{de^{iG}}{d\alpha} = \frac{2i}{\alpha}\left(D-\frac{1}{\alpha}K\right)e^{iG},$$

откуда следует желаемый результат

$$\frac{d}{d\alpha}(e^{iG_0}e^{iG}) = 0.$$

Наиболее интересным физическим примером, иллюстрирующим общие рассуждения, приведенные выше, является модель Калоджеро [11], описывающая парные взаимодействие n тождественных частиц, расположенных на вещественной прямой

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sum_{i<j}\frac{g}{(x_i-x_j)^2}, \tag{5}$$

где g – константа связи. Детальный квантово-механический анализ процессов рассеяния для модели (5) был проделан в работе [24]. В частности, было установлено, что процесс рассеяния n частиц с асимптотическими импульсами $(k_1,\dots,k_n)$ приводит только к перестановке возможных k_i без изменения их значений (отметим, что гамильтониан (5) инвариантен относительно группы перестановок тождественных частиц). Асимптотические волновые функции системы до и после рассеяния отличается только на фазовый множитель. Иными словами, рассеяние в системе (5) выглядит так же, как и рассеяние в системе n невзаимодействующих частиц (в этом контексте см. также монографию [18]).

В заключение отметим, что предложенное преобразование может быть использовано для построения суперсимметричных обобщений исходной конформной механики. Для этого достаточно построить суперсимметричное расширение свободной системы, возникающей в результате преобразования (4), и применить к нему обратное преобразование. Мы надеемся, что данный метод окажется эффективным при построении N=4 суперконформного расширения модели Калоджеро.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ (гранты МД-8970.2006.2, НШ-4489.2006.2), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 06-02-16346, № 06-02-04012), Немецкого научного фонда (грант № 436 RUS 113/669/0-3) и Международной ассоциации ИНТАС (грант № 03-51-6346).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aharony O., Gubser S., Maldacena J., Ooguri H., Oz Y. Large *N* Field theories, string theory and gravity // Phys. Rept. – 2000. – V. 323. – P. 183–386.
2. Mohaupt T. Black holes in supergravity and string theory // Class. Quant. Grav. – 2000. – V. 17. – P. 3429–3482.
3. Claus P., Derix M., Kallosh R., Kumar J., Townsend P., Van Proeyen A. Black holes and superconformal mechanics // Phys. Rev. Lett. – 1998. – V. 81. – P. 4553–4556.
4. Gibbons G.W., Townsend P.K. Black holes and Calogero models // Phys. Lett. B. – 1999. – V. 454. – P. 187–192.
5. Michelson J., Strominger A. Supergravity spectrum on AdS_2 x S^2 // J. High Energy Phys. – 1999. – V. 9909. – P. 005–029.
6. Michelson J., Strominger A. The geometry of (super) conformal quantum mechanics // Commun. Math. Phys. – 2000. – V. 213. – P. 1–17.
7. Britto-Pacumio R., Strominger A., Volovich A. Two-black-hole bound states // J. High Energy Phys. – 2001. – V. 0103. – P. 050–071.
8. Britto-Pacumio R., Maloney A., Stern M., Strominger A. Spinning bound states of two and three black holes // J. High Energy Phys. – 2001. – V. 0111. – P. 054–076.
9. Maloney A. Spradlin M. Strominger A. Superconformal multiblack hole moduli spaces in four-dimensions // J. High Energy Phys. – 2002. – V. 0204. – P. 003.
10. Gaiotto D., Strominger A., Yin X. Superconformal black hole quantum mechanics // J. High Energy Phys. – 2005. – V. 0511. – P. 017–025.
11. Calogero F. Solution of the one-dimensional N-body problem with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials // J. Math. Phys. – 1971. – V. 12. – P. 419–436.
12. Wyllard N. (Super)conformal many-body quantum mechanics with extended supersymmetry // J. Math. Phys. – 2000. – V. 41. – P. 2826–2838.
13. Galajinsky A. Comments on *N*=4 superconformal extension of the Calogero model // Mod. Phys. Lett. A. – 2003. – V. 18. – P. 1493–1498.
14. Bellucci S., Galajinsky A., Krivonos S. Many-body superconformal systems from hamiltonian reductions // Phys. Rev. D. – 2003. – V. 68. – P. 064010.
15. Bellucci S., Galajinsky A., Latini E. New insight into WDVV equation // Phys. Rev. D. – 2005. – V. 71. – P. 044023.
16. Olshanetsky M., Perelomov A. Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras // Phys. Rept. – 1981. – V. 71. – P. 313–404.
17. Olshanetsky M., Perelomov A. Quantum integrable systems related to Lie algebras // Phys. Rept. – 1983. – V. 94. – P. 313–400.
18. Sutherland B. Beautiful models. – Singapore: World Scientific, 2004. – 398 p.
19. Gorsky A., Mironov A. Integrable many body systems and gauge theories // Preprint hep-th/0011197.
20. De Alfaro V., Fubini S., Furlan G. Conformal invariance in quantum mechanics // Nuovo Cim. A. – 1976. – V. 34. – P. 569.
21. Gurappa N., Panigrahi P.K. Equivalence of the Calogero-Sutherland model to free harmonic oscillators // Phys. Rev. B. – 1999. – V. 59. – P. 2490–2493.
22. Brzezinski T., Gonera C., Maslanka P. On the equivalence of the rational Calogero-Moser system to free particles // Phys. Lett. A. – 1999. – V. 254. – P. 185–196.
23. Basu-Mallick B., Gupta K.S., Meljanac S., Samsarov A. Quantization and conformal properties of a generalized Calogero model // Preprint hep-th/0609111.
24. Polychronakos A. Nonrelativistic bosonization and fractional statistics // Nucl. Phys. B. – 1989. – V. 324. – P. 597–630.